ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертации
Лимоновой Ирины Викторовны
"Ограничение операторов на координатные полпространства
и теоремы дискретизации",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный
и функциональный анализ

В работе изучаются свойства сужений операторов, действующих из одного банахова пространства в другое, на конечномерные пространства. Даются оценки норм таких операторов и ставятся задачи поиска подпространств, сужение на которые обеспечивает желаемые свойства норм. Серия задач, рассматриваемых в диссертации, посвящена матричным операторам. Изучение (p,q)-норм таких операторов тесно связано с вопросами сходимости общих ортогональных рядов, занимаясь которыми, сорок лет назад Б.С. Кашин открыл важное направление нахождения подматриц с требуемыми свойствами норм и доказал факт существования подматрицы с малой (2,2)- нормой у любой матрицы с единичной (2,2)- нормой. Далее это направление активно изучалось многими математиками, включая серию работ Ж.Бургейна и Л. Цафрири об ограниченной обратимости. Результаты такого рода оказались полезными для решения задач о дискретизации типа теоремы Марцинкевича. Тематика также нашла свое применение во многих областях математики, в частности, в выпуклой геометрии, в квантовой механики, где благодаря новым методам удалось решить знаменитую проблему Кадисона-Зингера, а также в теории графов. Другая серия теорем, представленных в диссертации, относится к изучению свойств типа лакунарности в подсистемах ортогональных систем. Классическая теорема Банаха об S_p-системах положила начало развитию этой тематики. Особенно трудным оказался поиск конечных лакунарных или так называемых слабо лакунарных подсистем. Этой тематикой в разное время занимались многие известные математики, включая Ю. Марцинкевича, П. Эрдеша, Ж. Бургейна, Н.Я. Виленкина, Б.С. Кашина, У. Рудина, С.Б. Стечкина и др. Наконец, в диссертации затронуты вопросы точной весовой дискретизации, а именно, приведены примеры, опровергающие известную гипотезу.

Первая глава диссертации посвящена изучению операторных норм подматриц, полученных из данной матрицы выбрасыванием части строк. В теореме 1.1 доказана возможность разбиения матрицы A, удовлетворяющей некоторым естественным требованиям, на две подматрицы $A(\Omega_1)$, $A(\Omega_1)$, так, чтобы как можно меньше была норма образа соответствующего оператора для каждой из подматриц, а именно: дается оценка сверху ℓ_q-норм векторов $A(\Omega_k)(x)$, $k = 1,2$, через ℓ_q-норму вектора $A(x)$ с константой, близкой к к величине $2^{1/q}$. Для пространства векторов с произвольной нормой $\|\cdot\|_X$ отсюда легко извлекается оценка норм операторов подматриц (действующих из X в ℓ_q), близкая к $2^{1/q}\|A\|_{(X,q)}$, что и сказано в теореме 1.2. Далее этот результат усиливается для случая $X = \ell_1$. В теореме 1.3 в менее ограничительных предположениях об исходной матрице A дается три более аккуратных оценки норм операторов, каждая из которых является наилучшей для определенных наборов параметров. В теореме 1.4 приведен пример матрицы A, такой что при некоторых значениях параметров для любых двух подматриц имеет место равенство $\max\{\|A(\Omega_1)\|_{(1,q)}, \|A(\Omega_2)\|_{(1,q)}\} = \|A\|_{(1,q)}$, $k = 1,2$, т.е. показано, что невозможно получить хорошую оценку для всех значений параметров.

Во второй главе изучаются подсистемы конечных ортогональных систем $\{\varphi_j\}_{j=1}^N$, где $\varphi_j \in L_p(X) = L_p(X,\mu)$, (X,μ) – некоторое вероятностное пространство, $\|\varphi_j\|_{L_p} \leq 1$ и $p > 4$. Предполагается, что матожидание попадания каждой функции φ_j в подсистему равно заданному δ, зависящему от N. Для таких подсистем рассматриваются операторы, действующие из пространства, которому принадлежат коэффициенты полинома по подсистеме, в некоторое конкретное пространство Орлича. В теореме 2.1 операторы действуют из дискретного пространства Лоренца, и дается оценка норм таких операторов для некоторых подсистем, причем указывается вероятность обеспечения этой оценки для данного δ. Согласно этой оценке, нормы растут, но очень медленно, т.е., подсистема обладает свойством типа лакунарности. В теореме 2.2 получено аналогичное утверждение для операторов, действующих из ℓ_2. Теоремы 2.1 и 2.2 улучшают результат, полученный ранее диссертантом совместно с Б.С. Кашиным, где операторы действовали из пространства ℓ_∞ и в оценке еще присутствовал множитель, равный корню из числа элементов подсистемы. В теореме 2.3 в тех же предположениях рассматривается оператор, сопоставляющий набору коэффициентов супремум частичных сумм полинома. Установлено, что существует подсистема с достаточно большим числом слагаемых и со свойством типа лакунарности. Непростые доказательства этих теорем проводятся по схеме, разработанной Ж. Бургейном.

Третья глава посвящена вопросам точной дискретизации L_2-нормы. В теореме 3.1 представлен конкретный пример двумерного пространства, реализующего точную весовую дискретизацию типа Марцинкевича с минимально возможным числом слагаемых в дискретном разложении. Этот результат опровергает гипотезу о том, что коэффициенты в таком разложении всегда положительны. В 2019 г. в работе Ф.Дая, А. Примака, В.Н. Темлякова и С.Ю. Тихонова эта гипотеза была представлена как открытая проблема. Теорема 3.2 усиливает результат теоремы 3.1 в двух направлениях. Во-первых, в представленном примере (где уже идет речь о 8-мерном пространстве) не только тоже есть отрицательные коэффициенты дискретного разложения, но еще доказано, что для того же числа узлов не существует разложения с положительными коэффициентами. Во-вторых, пространство состоит из непрерывных функций.

Замечаний по существу у меня нет, но есть претензии к изложению материала.

Нет определения термина "почти лакунарная система", который активно употребляется в тексте.

На стр.3, 10+, сказано: "ограничение T на координатное подпространство L_1 в образе". Чуть выше говорилось, что под ограничением оператора понимается его сужение, и непонятно, как может быть сужение оператора, действующего из X в Y, на что-либо в образе (т.е., в Y). Аналогичное высказывание видим в начале стр. 4.

В доказательстве теоремы 1.1 (стр.23, 1+) стоило бы пояснить, почему существует δ-сеть в метрике пространства X на единичной сфере с числом элементов не более, чем $(3/\delta)^n$. Нетрудно понять, что порядок такой, но фигурирует постоянная 3, которая очень важна для оценок, и проверка этого требует размышлений, тем более, что норма там еще и зависит от матрицы. Аналогичные утверждения без доказательств и ссылок встречаются несколько раз, например, единственное, о чем можно задуматься в доказательстве леммы 2.2, – это проверка утверждения "Для каждого такого шара ....", но это-то как раз и не объясняется.

В формулировке теоремы 2.1 (одной из основных теорем) не сказано, что такое S_Λ – оператор, о котором идет речь. Этого также не сказано ни в начале параграфа, ни в обозначениях к главе, и в предшествующих леммах этот символ не появлялся. Понять можно, лишь прочитав доказательство или разыскав определение в середине введения. Аналогичные претензии к формулировке теоремы 2.3.

В доказательстве теоремы 2.3 сказано "пусть подсистема Φ_Λ, построенная при доказательстве теоремы 2.2", но доказательство этой теоремы практически отсутствует, а в доказательстве теоремы 2.1 (из которой следует теоремы 2.2) обсуждаются подсистемы, порожденные различными $\Lambda(\omega)$, и никакого построения нет. Также, в доказательстве теоремы 2.3 стоило бы пояснить, что за "соображения непрерывности"(стр. 62, 15+), которые позволяют считать, что все координаты ненулевые, хотя бы уточнить из непрерывности чего.

В начале третьей главы, при описании постановки задачи, появляется символ $M^w(m, 2, 0)$, который не вводится и не использовался в предыдущих главах. Узнать, что это, можно только перечитав введение.

Я воздержусь от перечисления замеченных опечаток (которых совсем немного) и стилистических огрехов.

Резюмируя сказанное, заключаю следующее: в диссертации получен ряд важных актуальных результатов, улучшающих многие известные ранее результаты; опровергнута гипотеза, фигурирующая ранее в литературе как открытая проблема; все представленные теоремы снабжены доказательствами, которые базируются на многочисленных вспомогательных утверждениях, доказанных с использованием весьма непростой техники. Отмечу также, что все результаты опубликованы в высокорейтинговых рецензируемых журналах, а также, что автореферат полно и правильно отражает основные положения диссертационной работы. Таким образом, диссертационная работа соответствует всем требованиям ВАК о присуждении ученых степеней, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доктор физико-математических наук
профессор факультета прикладной математики – процессов управления
Санкт-Петербургского государственного университета

М.А. Скопина
29.11.22