

**ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА**  
ЮШКОВА Михаила Петровича  
о диссертационной работе ЮЛИНОЙ Анны Олеговны  
«Развитие математических методов решения проблемы о вращении  
твёрдого тела вокруг неподвижной точки в XVIII-XIX вв.»,  
представленную на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук  
по специальности 5.5.6 – История науки и техники

Диссертация А.О. Юлиной посвящена вопросам становления базовых методов теоретической механики на примере задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. В настоящее время преподавание теоретической механики на математических факультетах классических университетов использует эту задачу как модельную. Такой подход дает фундамент для последующих построений, однако полностью оставляет без внимания большой пласт трудов, приведших к современной форме, а также развитие математического аппарата, например, в виде теории эллиптических функций, необходимого для полного решения этой задачи. Важно отметить, что значительная часть этих исследований, занимающая почти столетний интервал, осталась за пределами внимания исследователей. Ярким примером тому является судьба исследований русского математика и механика, академика Осипа (Иосифа) Ивановича Сомова. Как известно, Леонард Эйлер впервые классифицировал все задачи механики как прямые и обратные и определил классическое решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Практическое продвижение аналитического решения этой задачи дал Жозеф Луи Лагранж, сформулировав решение в квадратурах. Дальнейшее развитие поиска общего решения уже требовало привлечения либо нового математического аппарата, выражавшегося в нарождающейся теории эллиптических функций, либо геометрического подхода, базирующегося на понятии поверхностей Римана. Таким образом, необходимость создания общего подхода возникла естественным образом, причем это был сложный и длительный процесс.

В диссертации неоднократно отмечается, что после Лагранжа исследование указанной задачи носило характер поиска частных решений, удобных для инженерных приложений. С другой стороны, в работах Нильса Абеля, Карла Якоби, Карла Вейерштрасса бурно развивалась интерпретация задач динамики с помощью тэта-функций. Необходимо отметить инструментальную сложность теории эллиптических функций в приложениях к задачам механики, и нежелание ее применения многими исследователями, например, наблюдалось даже некоторая неприязнь к ней П.Л. Чебышёва, что отмечал ряд современников. Тем не менее круг вопросов, допускающих решение с помощью теории эллиптических функций, неуклонно расширялся. Именно эта теория позволила поставить задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в самом общем виде и получить наиболее общее решение, а далее на основании численного моделирования получать из него частные решения. Развитие научно-исторического интереса к процессам становления задачи о вращении, ныне воспринимаемой нами как базовая модель, важно для понимания общей логики развития математики и механики и актуальности направлений ее дальнейшего развития. В свете сказанного **актуальность тематики диссертации не вызывает сомнения.**

Автором диссертации проделана большая работа по исследованию первоисточников. Это позволило составить целостную картину и проследить как сами процессы развития подходов к задаче о вращении, так и сопряженное с ними развитие математических методов и их внутреннюю логику, а также общую научную атмосферу, в которой проходило это становление.

**Исследование начинается** с работ Л. Эйлера, создавшего классификацию задач механики и последовательно изложившего основания динамики от динамики точки (1736) до динамики твердого тела (1760). Подробно рассмотрена постановка Л. Эйлером общей модели задачи о вращении, позволяющая варьировать параметры и получать частные случаи. Эйлер широко привлекал методы интегрального, дифференциального исчисления и дифференциальных уравнений. Отмечен приоритет Эйлера в предпочтении понятия центра масс понятию центра тяжести, изложение теории моментов инерции как самостоятельного аппарата, введение понятия главных осей инерции (1749). Эйлер поставил задачу разложения свободного движения твердого тела на поступательное движение с центром инерции и вращательное вокруг центра инерции, дал кинематическое описание и составил динамические уравнения. Вращение он представил осуществляющимся вокруг оси, проходящей через центр инерции, с течением времени меняющей свое направление. В результате он получает выражения для компонентов скорости произвольной точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки (1750). Полученные им динамические уравнения позволяют получить ответ на обратный вопрос: заданы силы, действующие на тело, вращающееся вокруг оси, проходящей через центр инерции с заданной угловой скоростью, требуется определить, как за малое время изменится положение оси вращений и угловая скорость. Эйлер дал первый случай интегрируемости, рассматривая вращение тела около неподвижной точки при условии равенства нулю момента внешних сил. Таким образом показано, что Эйлером дана общая постановка задачи, терминология и метод ее решения с помощью дифференциальных уравнений.

В 1773 г. Ж. Лагранж рассмотрел случай, когда тело имеет ось динамической симметрии, проходящую через неподвижную точку, и при этом оно движется под действием только силы тяжести, точка приложения которой лежит на этой оси динамической симметрии и не совпадает с полюсом. В общем случае такая задача сводится к квадратурам, но решение выражается через эллиптические функции. Лагранж также дал метод приближенного вычисления решения. Его решение стало точкой роста инженерных разработок и послужило началом теории гироскопов.

В 1834 г. Луи Пуансо предложил геометрическую интерпретацию решений Эйлера и Лагранжа. Он ввел конусы, описываемые мгновенной осью в теле и в пространстве, в силу чего движение тела, имеющего одну неподвижную точку, можно представить как движение некоторого конуса с вершиной в этой точке, катящегося без скольжения по поверхности неподвижного конуса с той же вершиной. Таким образом, Пуансо стал основоположником геометрического подхода в механике.

**Вторая глава** посвящена истории развития теории эллиптических функций применительно к задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Решение этой задачи описывалось нелинейными системами дифференциальных уравнений и требовало интегрирования в эллиптических функциях. В диссертации рассматривается история возникновения эллиптических интегралов, начиная с работ И. Ньютона (1676),

братьев Якоба и Иоганна Бернулли, Джулио Карло Фаньяно (1750) (поставившего задачу о нахождении периметра эллипса), Джона Ландена (1775) и А.-М. Лежандра (1792). Подробно рассматривается развитие теории эллиптических функций в работах Н. Абеля, К. Якоби и К. Вейерштрасса, причем особое внимание останавливается на значении теоремы Абеля. Далее автор переходит к центральному персонажу исследования – О.И. Сомову, впервые давшего ясное и лаконичное изложение теории эллиптических функций (1850), удобное для приложений. Автор развертывает панораму достижений предшествующих Сомову математиков и убедительно показывает, как Сомов, используя эллиптические функции, интегрирует дифференциальные уравнения движения и получает общее аналитическое решение задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки (1851-1855).

**Третья глава** посвящена фундаментальному вкладу О.И. Сомова в интерпретацию теории эллиптических функций применительно к задачам механики и его решению задачи о вращении твердого тела. Рассказан научный путь Сомова, подробнейшим образом охарактеризована его «Рациональная механика» (1872-1877). Заметим, что великолепное методическое изложение курса механики О.И. Сомова оставило равнодушным соотечественников, а вот в Германии этот курс было переиздано по меньшей мере 19 раз. Как опытный преподаватель теоретической механики, А.О. Юлина дает обзор и сравнительный анализ учебников механики XIX в., выделяет в курсе О.И. Сомова общий аналитический метод постановки и решения фундаментальных задач механики, использование аппарата эллиптических функций, в котором задачи механики решаются просто и лаконично, без длинных выкладок. Особо отмечаются введенные Сомовым в механику основные понятия векторного исчисления (градиент, годограф, векторное произведение, линии и поверхности уровня, потенциала и их геометрический и векторный смысл), ускорения различных порядков, криволинейные обобщенные координаты.

**Четвертая глава** посвящена постановке классической задачи о вращении твердого тела и ее современной интерпретации. Рассмотрены задача движения, кинематическая задача, динамическая задача. Отмечается, что деление задачи на кинематическую и динамическую части было выполнено Эйлером, им же показана необходимость дифференциальных и интегральных методов для динамической части, благодаря чему удается определить угловые скорости в заданный момент времени. Эйлер дал описание решения с помощью системы шести нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, носящих его имя. Для определения положения тела в пространстве, т.е. углов Эйлера, привлекаются кинематические уравнения. В случае произвольных начальных условий и моментов инерции решение представленной системы дифференциальных уравнений невозможно. Эйлеру первому (1759 г.) удалось задать систему ограничений дифференциальных уравнений движения в задаче о вращении твердого тела около неподвижной точки.

**Пятая глава** посвящена аналитическому представлению задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Рассмотрены случаи Эйлера и Лагранжа и Якоби-Сомова (в случае первоначального удара). Показано, что рассмотренное решение задачи, представленное О.И. Сомовым (1850), вполне объясняет дальнейшее направление исследований: как в представлении с помощью кватернионов, так и в решении С.В. Ковалевской. Рассмотрена история вопроса и аналитическое обоснование гироскопического эффекта в работах О.И. Сомова.

**Центральной темой** пятой главы является найденная А.О. Юлиной и переведенная ею с французского языка забытая статья О.И. Сомова 1855 г., посвященная строгому решению задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки. Установлен приоритет Сомова в полном решении задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.

Содержание диссертации охватывает двухсотлетний период развития механики от Эйлера до Сомова и восполняет столетнее отсутствие исследований по истории указанной задачи как со стороны аналитической механики, так и со стороны развития сопряженного с ней математического аппарата, при этом уделяется достаточное внимание развитию инженерных приложений. Диссертация содержит целостный анализ развития заявленной проблемы, большое количество новых фактов, подтверждающих концепцию автора. Список литературы содержит 128 наименований на русском, французском, немецком и английском языках. Знание и понимание того, какой путь был пройден до современного состояния вопроса, важно для понимания его сути и дальнейшего направления развития. Эту работу полезно отразить в учебном процессе, ее материалы могут быть использованы в образовательных программах хотя бы математических факультетов классических университетов.

К незначительным недостаткам диссертации можно отнести некоторые стилистические погрешности, шероховатости стиля и повторы, что не умаляет общей ценности работы.

**Диссертация ЮЛИНОЙ Анны Олеговны «Развитие математических методов решения проблемы о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в XVIII-XIX вв.»** представляет собой оригинальный законченный научно-квалификационный труд. Представленная работа выполнена на высоком уровне, удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, автореферат правильно отражает основное содержание диссертации. Автор диссертации А.О. Юлина заслуживает присуждения ей ученой степени кандидат физико-математических наук по специальности 5.5.6 – История науки и техники.

Я, Юшков Михаил Петрович, даю согласие на включение моих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета, и дальнейшую их обработку.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,  
профессор, профессор кафедры  
теоретической и прикладной механики  
математико-механического факультета  
С.-Петербург. гос. университета

*STOEN*

М.П. Юшков

Дата 04.09.2023

Адрес: 198095, СПб., п

Тел. +7 921-570-27-67.

e-mail: yushkovmp@mail.ru



Текст документа размещен  
в открытом доступе  
на сайте СПбГУ по адресу  
<http://spbu.ru/science/expert.html>